الثانية 1

الخميس 22/10/2015

② تعريف تجزئة فترة ما مثل $[a,b]$

تعريف تجزئة فترة ما مثل $[a,b]$:
نسمي مجموعة النقاط

$$P_{[a,b]} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

بحيث تحقق فيما بينها:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$2 \leq k \leq n \qquad x_k \in [a,b]$$

أي أنها متتالية متزايدة من النقاط وهي منتهية تجزئة للفترة $[a,b]$ أو نكتب اختصاراً:

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$$

- نلاحظ أنه يمكن تجزئة الفترة المغلقة والمحدودة $[a,b]$ بعدة أشكال مختلفة لذلك يوجد أكثر من تجزئة للفترة. ونستطيع القول أن التجزئة ليست وحيدة. وهذا يعني أننا نحصل على أسرة من التجزئات لهذه الفترة والتي نرمز لها عادةً $\mathbb{P}_{[a,b]}$ وهي أسرة كل التجزئات الممكنة للفترات المغلقة $[a,b]$.

مثال:
لتكن لدينا الفترة $[0,1]$ فيمكننا الحصول على عدة تجزئات بالشكل:

$$P_1 = \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}$$

$$P_2 = \{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, 1\}.$$

تعريف نظيم التجزئة:
نسمي العدد $\|x\|$ نظيم x أو $\lambda(P)$ نظيم التجزئة P للفترة $[a,b]$ ونرمز:

$$\lambda(P) = \|P\| = \max_{1 \leq k \leq n} \{|x_k - x_{k-1}|\}$$

كما ويسمونه ذراع التجزئة.

تعريف الدالة ذات التغيرات المحدودة:
لتكن f دالة معرفة بالشكل: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ أي معرفة على فترة مغلقة ومحدودة ونفرض أن:

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}.$$

تجزئة للفترة $[a,b]$.
نشكل بدء المجموع:

$$\sum_{n=1}^{a} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

الثانية 2

$$v(f;P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \quad ①$$

تحسب تغير الدالة عند نقاط التجزئة.

ومن أجل كل تجزئة للفترة $[a,b]$ يمكننا الحصول على مجموع من هذا القبيل وبالتالي يكون لدينا أسرة من المجاميع المرافقة لكل التجزئات الممكنة لـ $[a,b]$ أي أننا نحصل على جماعة من المجاميع:

$$\{ v(f;P) ;\ \forall P \in \mathbb{P}_{[a,b]} \} \quad ②$$

- اذا كان المجموع ① أو أسرة المجاميع ② محدودة أي يوجد ثابت حقيقي $M>0$ بحيث يكون أحد عناصرها: $v(f;P) \leq M$

(أي هذا المجموع محدود) أياً كانت $P \in \mathbb{P}_{[a,b]}$

فإننا نقول عندئذ عن الدالة f أنها ذات تغيرات محدودة على الفترة $[a,b]$.

وفي هذه الحالة نسمي الحد الأعلى الأصغري لهذه الأسرة بالتغير الكلي للدالة f على الفترة $[a,b]$ ونرمز: $V(f;[a,b])$ أو $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

وعندها نكتب التغير الكلي بالتعريف هو:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup\{ v(f;P) ;\ P \in \mathbb{P}_{[a,b]} \}.$$

أما اذا كانت المجموعة ② غير محدودة فإننا نقول عن الدالة أنها ليست ذات تغيرات محدودة على الفترة $[a,b]$ وفي هذه الحالة يكون التغير الكلي:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = +\infty$$

ملاحظة:

من الآن فصاعداً يمكن أن نقول f دالة ذات تغيرات محدودة بدلاً من محدودة التغير أحياناً فنكتب اختصاراً: ذ.ت.م. ونرمز لصف الدوال ذ.ت.م على $[a,b]$ بالرمز: $BV[a,b]$ فنكتب: $f \in BV[a,b]$.

② من التعريف ينتج أنه اذا كانت $f \ni BV[a,b]$ فإن كل حد من حدودها لا يتجاوز التغير. $v(f;P) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ وهذا التعريف ينتج من تعريف الحد الأعلى الأصغري (أي أنه حد أعلى لها ماعنصرها).

③ في حال كانت الدالة f معرفة على فترة غير محدودة مثل $[a,\infty[\ni v$ فتكون f ذ.ت.م على هذه الفترة اذا كانت ذ.ت.م على الفترة المغلقة $[a,A]$ ويوجد ثابت k لا يتعلق بـ A بحيث يكون التغير الكلي للدالة f يكون بالشكل:

الثانية 3

$$\overset{\infty}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_{A>a} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \lim_{A\to\infty} \overset{A}{\underset{a}{V}}(f).$$

وبصورة مماثلة يمكن التعامل مع الفترات $]-\infty, \infty[\ ,\ ]-\infty, b[$

$$\sup_{\substack{A>a \\ B \cancel{>} b}} \overset{B}{\underset{A}{V}}(f)$$

(4) اذا كانت $b < a$ فاننا نضع:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = -\overset{a}{\underset{b}{V}}(f).$$

مثال:

باستخدام التعريف ناقش فيما اذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[0,4]$ ذات تغير محدود وجد تغيرها الكلي.

الحل: لدينا: $f : [0,4] \to \mathbb{R}$.

ولتكن P تجزئة للفترة $[0,4]$ بالشكل:

$$P = P[0,4] = \{0 = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = \underset{n}{b}\}.$$

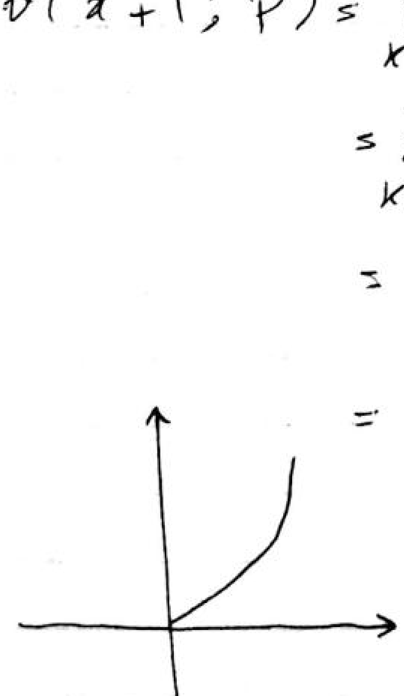
مع اختيارية كيفية عشوائية ولنبين ان المجموع الموافق لهذه التجزئة الاختيارية فنحصل على:

$$v(x^2+1; P) = \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| x_k^2 + 1 - x_{k-1}^2 + 1 \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 - x_{k-1}^2 \right)$$

$$= x_n^2 - x_0^2 = 16 - 0 = 16.$$



مهما كانت P اختيارية فالمجموع $v(f;P)$ محدود والدالة ذات تغير محدود على الفترة $[0,4]$ وتغيرها الكلي:

الثانية 4

$$\overset{4}{\underset{0}{V}}(x^2+1) = \sup\{16\} = 16 > 0$$

ملاحظة:
الدالة المعرفة مستمرة وليست ذ.ت.م إلا أننا سنواجه دوال مستمرة وليست ذ.ت.م على فترات محدودة كـ $[a,b]$.

مثال ②:
بين فيما اذا كانت الدالة f المعرفة بالصورة:

$$f = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} & ; \quad 0 < x \le 1 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

ذ.ت.م أم لا على الفترة $[0,1]$ مع التعليل.

ملاحظات:

1. المجموع $V(f;P)$ لا يصغر أو يتناقص عند اضافة نقاط جديدة للتجزئة مثلاً لو أضفنا النقطة t بين النقطتين x_k, x_{k-1} فإن: $|f(x_k)-f(x_{k-1})|$ من المجموع ① السابق يصبح بالشكل:

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \le |f(x_k) - f(t)| + |f(t) - f(x_{k-1})|.$$

2. اذا كانت P_1, P_2 تجزئتان للفترة $[a,b]$ وكانت P_2 أدق أو أنعم أو أحتوى كتجزئة فإنه التغير الموافق لـ P_1 $\le$ التغير الموافق لـ P_2.

$$V(f;P_1) \le V(f;P_2)$$

الثانية 5 / الثالثة 1

③ دقة ونعومة التجزئة

الخميس 2014/10/29

$\boxed{3}$ اذا كانت f ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$ تكون أيضاً ذ.ت.م على أية فترة جزئية منها مثل:

$$[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$$

يكون عندئذ:

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(f) \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

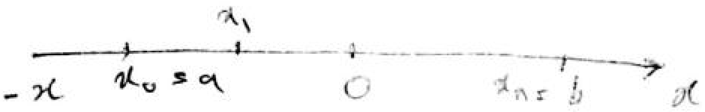
وهذا ينتج من التعريف والملاحظة السابقة مباشرة.

- دقة ونعومة التجزئة:

نقول عن التجزئة P_1 للفترة $[a,b]$ أنها أدق أو أنعم أو أقوى من التجزئة P_2 لنفس الفترة اذا كانت $P_1 \supset P_2$. كما نقول أيضاً أن التجزئة P_2 أخشن أو أضعف من P_1.

مثال: $P_1 = \{x_0 = a, x_1, \underset{+}{,} \dots, x_n = b\}$

الجديدة P_2 والأنعم أي $P_1 \subset P_2$.



اذا أخذنا الفترة $[0,1]$ فإن كل من $P_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

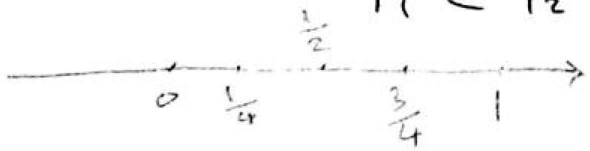
$P_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

تجزئات لهذه الفترة حيث:

$$P_1 \subset P_2$$

0962 0

774



لاحظ هنا من خلال المثال السابق أنه اذا $P_1 \subset P_2$ فإن $\lambda(P_1) \ge \lambda(P_2)$ إلا أن العكس ليس صحيحاً.

نعود إلى الدوال محدودة التغير:

ملاحظات: